№6 дәрістік сабақтарға шығаруға арналған практика есептері.

Операциялық есептеулер арқылы тұрақты коэффициентті сызықты диффренциалдық теңдеулерді шешу.

Есеп №1. Коши есебін операционды әдіспен шешу.

$$y''-3y'+2y = 2e^t\cos\frac{t}{2},\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

Шешімі. Келесі қатынастарды пайдаланып:

$$e^{at}\cos\omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2},$$

$$2e^t\cos\frac{t}{2}\div 2\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}$$

аламыз.

y(t)-тің өрнегін *Y(p)* арқылы белгілегеннен соң:

$$y'(t)\div pY(p)-y(0) = pY(0)-1.$$

$$y''(t)\div p^2Y(p)-py(0)-y'(0) = p^2Y(p)-p.$$

Теңдеудің сол және оң жақ өрнектерін жазып алып,

$$p^2Y(p)-p-3PY(p)+3+2Y(p) = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}},$$

$$Y(p)(p^2-3p+2) = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+p-3,$$

$$Y(p) = \frac{2(p-1)}{((p-1)^2+\frac{1}{4})(p-1)(p-2)}+\frac{p-3}{(p-1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{2}{((p-1)^2+\frac{1}{4})(p-2)}+\frac{p-3}{(p-1)(p-2)}$$

аламыз.

Жазып алынған әрбір бөлшекті қарапайым түрге жіктейміз:

1) $$\frac{2}{((p-1)^2+\frac{1}{4})(p-2)} = \frac{Ap+B}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}+\frac{C}{p-2};$$

$$2 = (Ap+B)(p-2)+C((p-1)^2+\frac{1}{4}).$$

p=2 –ны қойсақ, $2 = C\cdot\frac{5}{4}\Rightarrow C = 1{,}6.$

$$2 = Ap^2 - 2Ap + Bp - 2B + 1{,}6p^2 - 3{,}2p + 2;$$

$$\begin{array}{c|l} p^0 & 2 = -2B + 2 \Rightarrow B = 0 \\ p^1 & 0 = -2A + b - 3{,}2 \Rightarrow A = -1{,}6 \end{array}$$

Демек,

$$\frac{2}{\left((p-1)^2 + \frac{1}{4}\right)(p-2)} = \frac{-1{,}6p}{\left((p-1)^2 + \frac{1}{4}\right)} + \frac{1{,}6}{p-2};$$

2) $\dfrac{(p-3)}{(p-1)(p-2)} = \dfrac{D}{p-1} + \dfrac{E}{p-2};$

$$p - 3 = D(p-2) + E(p-1).$$

Осыдан p=2, p=1 болғанда, $-1 = E;\ -2 = -D \Rightarrow D = 2$ шығады.

Олай болса, $\dfrac{p-3}{(p-1)(p-2)} = \dfrac{2}{p-1} - \dfrac{1}{p-2}$.

Қорыта келгенде

$$Y(p) = \frac{-1{,}6p}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1{,}6}{p-2} + \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p-2} = \frac{-1{,}6p + 1{,}6}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1{,}6}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} +$$

$$+ \frac{0{,}6}{p-2} + \frac{2}{p-1} = -1{,}6\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} - 3{,}2\frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{0{,}6}{p-2} + \frac{2}{p-1}.$$

Төмендегі қатынастар

$\dfrac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2} \div e^{at}\cos\omega t,\quad \dfrac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2} \div e^{at}\sin\omega t,\quad \dfrac{1}{p-a} \div e^{at}$ мен

сызықты қасиеттерді пайдаланып, $Y(p)$ үшін түпнұсқасын табамыз:

$$y(t) = -1{,}6e^t\cos\frac{1}{2}t - 3{,}2e^t\sin\frac{1}{2}t + 0{,}6e^{2t} + 2e^t$$

Жауабы: $-1{,}6e^t\cos\frac{1}{2}t - 3{,}2e^t\sin\frac{1}{2}t + 0{,}6e^{2t} + 2e^t$